Теория риска (сем)

Ирина Игоревна Поспелова

12.02

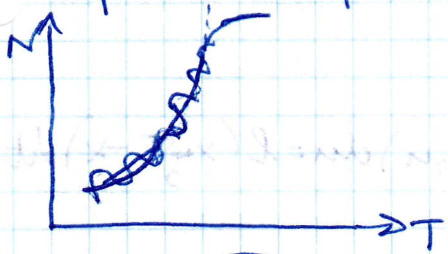
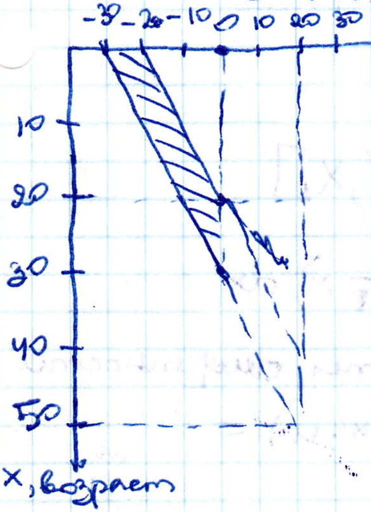


Диаграмма Лексиса



t, x

родился (t−x)

u – момент рождения

$\boxed{u+x=t}$

19.02

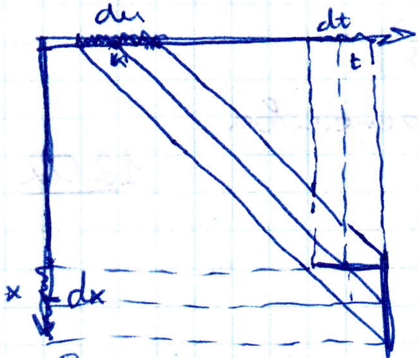
B(u) – функция плотности (интенсивность) рождения в момент u

$B(u)\underline{du}$

$N/t \cdot t = N$

$s(x,u)$ – ф-ция выживания (дожития) лиц родившихся в момент u.

$B(u)\,s(x,u) = l(x,u)$ – ф-ция плотност популяции



$\ell(x,u)du = \ell(x, t-x)dt$

? доживет до x

$[t_0, t_1]$ (иссл. x на интерв)

$$\int_{t_0}^{t_1} \ell(x, t-x)\,dt$$

? индивид в возрасте $[x_0, x_1]$

доживет в t_0 $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \ell(x, t_0 - x)\,dx$

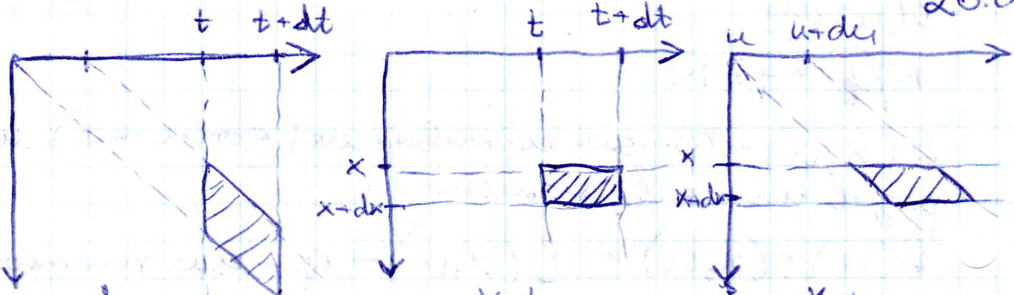
функция интенсивности смертности

$$\mu(x,u) = -\frac{1}{s(x,u)} \frac{\partial}{\partial x} s(x,u) =$$

$$= -\frac{1}{\ell(x,u)} \frac{\partial}{\partial x} \ell(x,u)$$

μ_x

26.02



t, u   x, t   x, u

① $\mu(t-u,u)\,\ell(t-u,u)\,dt\,du$ умерли на $[t, t+dt]$ из тех, кто родился на $[u, u+du]$

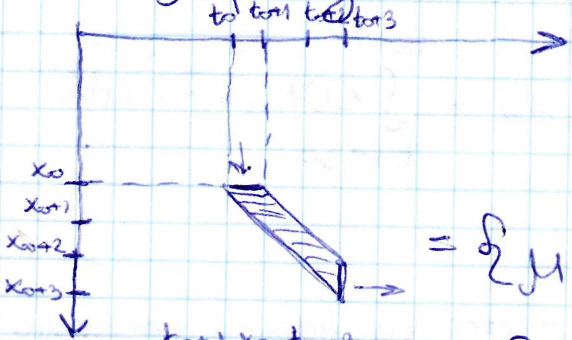
② $\mu(x, t-x)\, l(x, t-x)\, dt\, dx$ умерли в возрасте $[x, x+dx]$ в $[t, t+dt]$

③ $\mu(x, u)\, l(x, u)\, dx\, du$ умерли в возрасте $[x, x+dx]$ из числа родившихся на $[u, u+du]$

"in-and-out" метод

Пример

Сколько доживет до x_0 между t_0 и t_0+1 и умрет до t_0+3?



$$\int_{t_0-x_0}^{t_0+1-x_0} \int_{x_0}^{t_0+3-u} l(x,u)\,\mu(x,u)\,dx\,du =$$

$$= \left\{ \mu = -\frac{l'_x}{l} \right\} =$$

$$= \int_{t_0-x_0}^{t_0+1-x_0} \int_{x_0}^{t_0+3-u} \left[-\frac{\partial l(x,u)}{\partial x} \right] dx\,du =$$

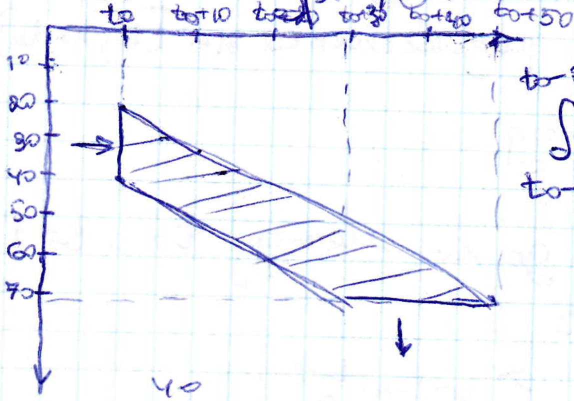
$$= \int_{t_0-x_0}^{t_0+1-u} \left[l(x_0,u) - l(t_0+3-u, u) \right] du =$$

$$\{ y = u + x_0 \} \quad \{ \omega = t_0+3-u \}$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+1} l(x_0, y_0 - x_0)\,dy - \int_{x_0+2}^{x_0+3} l(\omega, t_0+3-\omega)\,d\omega$$

Пример

Число лиц, находящихся в возр. [20, 40] в момент t_0, которые умрут до достижения возр. 70?



$$\int_{t_0-40}^{t_0-20}\int_{t_0-u}^{70} \ell(x,u)\mu(x,u)\,dx\,du =$$

$$= \int_{20}^{40} \ell(x, t_0-x)\,dx - \int_{t_0+30}^{t_0+50} \ell(70, t-70)\,dt$$

$s(x,u) = s(x)$

$\ell(x,u) = b\,s(x)$ – стационарная популяция

$\ell(x,u) = b e^{Ru} s(x)$ – устойчивая популяция

$\ell_x = \ell_0 s(x) = \ell(x,u)$

$$\int_{x_0}^{x_1} \ell(x, t_0-x) = \int_{x_0}^{x_1} \ell_x\,dx = \int_{x_0}^{\infty} \ell_x\,dx - \int_{x_1}^{\infty} \ell_x\,dx =$$

$= T_{x_0} - T_{x_1}$

T_x – число лет, прожитых после x

$$\int_{x_0}^{x_1} \ell_x \mu(x) = -\int_{x_0}^{x_1} \ell_x \frac{1}{\ell_x}\,d\ell_x = \ell_{x_0} - \ell_{x_1}$$

$\ell(x,u) = e^{Ru}\, b\, s(x) = e^{Ru}\, \ell_x$ 12.03

$b > 0$

$R = 0 \Rightarrow \ell(x,u) = b\, s(x)$

ω – максимальный возраст

численность популяции

$$N(t) = \int_0^\infty \ell(x, t-x)\,dx = e^{Rt} \int_0^\infty e^{-Rx} \ell_x\, dx$$

возрастная структура

$[x_0, x_1]$

$$\frac{\int_{x_0}^{x_1} \ell(x, t-x)\,dx}{N(t)} = \frac{\int_{x_0}^{x_1} e^{-Rx} \ell_x\, dx}{\int_0^\infty e^{-Rx} \ell_x\, dx}$$ – не завис от времени

$\delta \to R \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_1} \ell(x, t-x)\,dx = e^{Rt}(\bar N'_{x_0} - \bar N'_{x_1})$$

$$\bar N_x = \int_x^\infty \mathcal{D}_y\, dy = \int_0^\infty \mathcal{D}_{x-y}\, dy$$

$$\mathcal{D}_x = e^{-\delta x} \ell_x = \vartheta^x \ell_x$$

$$\mu(x,u) = -\frac{1}{\ell(x,u)} \frac{\partial}{\partial x} \ell(x,u) = -\frac{e^{Ru}\, b\, s'(x)}{e^{Ru}\, b\, s(x)} =$$

$$= \frac{s'(x)}{s(x)} = \mu_x$$

$$\int_{x_0}^{x_1} e^{R(t-x)} l_x \mu_x \, dx = e^{Rt} \int_{x_0}^{x_1} e^{-Rx} l_x \mu_x \, dx =$$

$$= e^{Rt} (\bar{M}'_{x_0} - \bar{M}'_{x_1})$$

$$\bar{M}_x = \int_x^{\infty} e^{-\delta y} l_y \mu_y \, dy$$

$$\begin{bmatrix} \text{скорость} \\ \text{изменения} \\ \text{числа лиц} \\ \text{старше } x_0 \\ \text{в } t \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} \text{достигшие} \\ x_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{умершие} \\ \text{старше } x_0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \text{общее число старше } x_0 \end{bmatrix}} =$$

$$= \frac{e^{Rt} D'_{x_0} - e^{Rt} \bar{M}'_{x_0}}{e^{Rt} \bar{N}'_{x_0}} = R$$

$$A_x + \delta \bar{a}_x = 1 \Rightarrow \bar{M}_x + \delta \bar{N}_x = D_x$$

Пример (стационарная популяция)

$$\mathring{e}_0 = \int_0^{\infty} s(x)\, dx = \int_0^{\infty} \frac{l_x}{l_0} dx = \frac{\int_0^{\infty} l_x \, dx}{l_0} = \frac{T_0}{l_0}$$

устойчивая

$$\frac{N(t)}{e^{Rt} l_0} = \frac{\int_0^{\infty} e^{R(t-x)} l_x \, dx}{e^{Rt} l_0} = \int_0^{\infty} e^{-Rx} s(x)\, dx = \bar{a}'_0$$

$R = 0 \Rightarrow \mathring{e}_0 = \bar{a}'_0$

$R > 0 \Rightarrow \mathring{e}_0 > \bar{a}'_0$

$R < 0 \Rightarrow \mathring{e}_0 < \bar{a}'_0$

Пример:

$l(x,u) = b(u)s(x)$

старше a (= active)

бессрочн. на сл. смерти b с выплатой 1 и непрерывными премиями, начиная с a

$$\bar{P}(\bar{A}_a) = \int_a^\infty l(x,t-x)\,dx + \delta \int_a^\infty l(x,t-x)\,{}_{x-a}\bar{V}(\bar{A}_a)\,dx =$$

$$= \int_a^\infty l(x,t-x)\mu(x)\,dx + \frac{d}{dt}\int_a^\infty l(x,t-x) \,*$$

$$*\, {}_{x-a}\bar{V}(\bar{A}_a)\,dx$$

$$\Pi_t + \delta\, {}_t\bar{V} = (b_t - {}_t\bar{V})\mu_x + \frac{d}{dt}\,{}_t\bar{V}$$

$$* l(x,t-x) \int_a^\infty dx \Bigg| \quad \bar{P}(\bar{A}_a) + \delta\, {}_{x-a}\bar{V}(\bar{A}_a) = \left(1 - {}_{x-a}\bar{V}(\bar{A}_a)\right)\mu_x(t) +$$

$$+ \frac{d}{dx}\,{}_{x-a}\bar{V}(\bar{A}_a)$$

$$\int_a^\infty l(x,t-x)\,d\left[{}_{x-a}\bar{V}(\bar{A}_a)\right] = \underset{0}{\underset{\parallel}{l\cdot V}}\Big|_a^\infty + \int_a^\infty$$

$$\frac{d}{dx} l(x,t-x) = \frac{d}{dx}\left(b(t-x)s(x)\right) =$$

$$= -b'(t-x)s(x) - b(t-x)s(x)\mu(x)$$

19.03 Пример

страхование на случай смерти с "0" резервами

Π_t -?

$$\Pi_t \int_a^{+\infty} l(x, t-x)\,dx = \int_a^{\infty} l(x, t-x)\,\mu(x)\,dx$$

$$l(x,u) = B e^{Ru} s(x)$$

$$\bar{P}(\bar{A}_a) \underbrace{\int_a^{\infty} e^{-Rx} l_x\,dx}_{(*)} + \delta \int_a^{\infty} e^{-Rx} l_x \,{}_{x-a}\bar{V}(\bar{A}_a)\,dx =$$

$$= \underbrace{\int_a^{\infty} e^{-Rx} l_x\,\mu(x)\,dx}_{(**)} + R \int_a^{\infty} e^{-Rx} l_x \,{}_{x-a}\bar{V}(\bar{A}_a)\,dx$$

с нулев. резерв.

$$\frac{\bar{P}(\bar{A}_a)}{\text{бесср.}\ \bar{P}'(\bar{A}'_a)} = \frac{(*)}{(**)}$$

$$\Pi_t = \frac{\int_a^{\infty} e^{-Rx} l_x\,\mu(x)\,dx}{\int_a^{\infty} e^{-Rx} l_x\,dx} = \underline{\bar{P}'(\bar{A}'_a)}$$

если $\delta < R \Rightarrow \bar{P}(\bar{A}_a) > \bar{P}'(\bar{A}'_a)$

$\delta = R \Rightarrow \bar{P}(\bar{A}_a) = \bar{P}'(\bar{A}'_a)$

$\delta > R \Rightarrow \bar{P}(\bar{A}_a) < \bar{P}'(\bar{A}'_a)$

$b(t)$

$\beta(x,u)$ - интенсивность рождения девочек

$\beta(x, t-x)\,dt$ - число девочек, родившихся на $[t, t+dt]$ у женщины возраста x

$$b_f(t) = \int\limits_t^\infty l_f(x, t-x)\,\beta(x, t-x)\,dx$$

$$b_f(t) = \int\limits_0^\infty b_f(t-x)\,\underbrace{s_f(x, t-x)\,\beta(x, t-x)}_{\varphi(x, t-x)}\,dx$$

$$b_f(t) = \int\limits_0^\infty b_f(t-x)\,\varphi(x)\,dx \qquad \varphi(x, t-x) = \varphi(x)$$

$b_f(t) = b e^{Rt}$ - частное решение

$b > 0$, $\underset{R \in \mathbb{R}}{R}$: $H(R) = 1$, $H(R) = \int\limits_0^\infty e^{-Rx}\varphi(x)\,dx$

$$b e^{Rt} = \int\limits_0^\infty b e^{R(t-x)}\varphi(x)\,dx$$

$1 = H(R)$

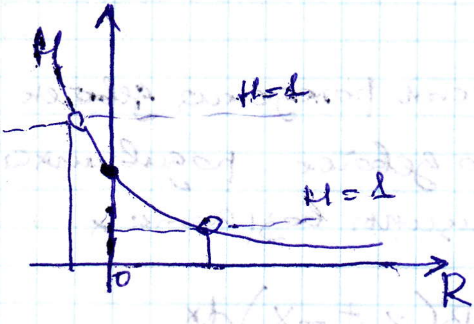
$H'(R) = -\int\limits_0^\infty x e^{-Rx}\varphi(x)\,dx < 0$

$H(0) = \int\limits_0^\infty \varphi(x)\,dx > 0$

$\lim\limits_{R\to\infty} H(R) = 0$

$\lim\limits_{R\to-\infty} H(R) = \infty$

$H''(R) = \int\limits_0^\infty x^2 e^{-Rx}\varphi(x)\,dx > 0$



Теория пенсионных схем

26.03

1. нет гос. регулирования
2. есть взносы и выплаты пенсий
3. все параметры детерминированы
4. нет бухгалтерии.

Модель

a - возраст вступления в пенс. схему

r - возраст выхода на пенсию

$s(a) = 1$

$n(u)$ - плотность достижения возр. a в момент u ($= b(u)$)

$n(u)s(x)$ - достигли возр. x в момент t:

$u = t - (x-a)$

$\omega(x), x \in [a, r)$ ставка з/п

формально $a < x < r$

$g(t)$

$\omega(x) g(t)$ - реальное измен з/п во времени!

02.04.

$\omega(x)$

$g(t)$

$n(u)\, s(x)$

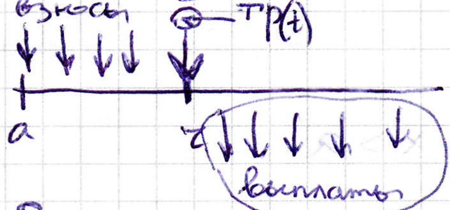
$$W(t) = \int_a^{\xi} n(t-x+a)\, s(x)\, \omega(x)\, g(t)\, dx$$

$r: \ f\omega(r) g(t)$

f - доля

$x \geq r \quad f\omega(r)\, g(t-x+r)\, h(x) \qquad h(r) = 1$

$h(x) = e^{\beta(x-r)}$



Накопление по конечному моменту

$$^{T}P(t) = \underbrace{f\omega(r) g(t)\, \bar{a}_r^h}_{\text{сколько платим}} \cdot \underbrace{n(t-r+a)\, s(r)}_{\text{кол-во людей}}$$

δ

$$\bar{a}_r^h = \int_r^{\infty} e^{-\delta(x-r)}\, h(x)\, \frac{s(x)}{s(r)}\, dx$$

Экспоненциальный случай

$h(x) = e^{\beta(x-r)}$

$g(t) = e^{\tau t}$

$n(u) = n e^{Ru}$

$\beta, \tau, R, \delta \ \Big| \ \tau \geq \beta \quad \delta \approx \tau$

$\beta < \delta$

$n(t-r+a+u) = n e^{R(t+u-r+a)} = n e^{Ru}\, n(t+a-r)$

$g(t+u) = e^{\tau(t+u)} = e^{\tau u} g(t)$

$$\bar{a}_r^h = \int_r^{\infty} e^{-(\delta-\beta)(x-r)}\, \frac{s(x)}{s(r)}\, dx = \bar{a}_r'$$

$^{T}P(t+u) = e^{Ru}\ {}^{T}P(t)$

Функция накопления актуарных обязательств.

$\mathcal{M}(x)$, $0 \le \mathcal{M}(x) \le 1$, определ. при $x \ge a$

$\mathcal{M}(r) = 1$, для $x > r$ ее считать бессмысленно

$\mathcal{M}(x) \uparrow$

16.04

$\mathcal{M}(a) = 0$

$\mathcal{M}(a) = 1$ накопление по начальному моменту

$\mathcal{M}(x) = 1, \; x \ge r$

$$\mathcal{M}(x) = \int_a^x m(y)\,dy \quad , x \ge a$$

$$\mathcal{M}'(x) = m(x)$$

$$m(x) = \frac{1}{r-a}$$

$$\mathcal{M}(x) = \frac{x-a}{r-a}$$

$$\mathcal{M}(x) = \frac{\bar{a}_{a:\overline{x-a}|}}{\bar{a}_{a:\overline{r-a}|}}$$

$$\mathcal{M}(x) = \frac{\int_a^x e^{-\delta(y-a)} s(y)\,dy}{\int_a^r e^{-\delta(y-a)} s(y)\,dy}$$

$\mathcal{M}(a) = 0$

$\mathcal{M}(r) = 1$

$\mathcal{M}(x) \uparrow$

$$\mathcal{M}'(x) = \frac{e^{-\delta(x-a)} s(x)}{\int_a^r e^{-\delta(y-a)} s(y)\,dy} = m(x) \ne 0$$

Основные актуарные функции

$(aA)(t)$ – актуарная настоящая величина будущих пенсионных выплат

$$(aA)(t) = \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\, {}^{T}P(t+r-x)\,dx$$

$$\frac{d}{dt}(aA)(t) = \int_a^r e^{-\delta(r-x)} \frac{\partial}{\partial t}\, {}^{T}P(t+r-x)\,dx -$$

$$= -\int_a^r e^{-\delta(r-x)} \frac{\partial}{\partial x}\, {}^{T}P(t+r-x)\,dx =$$

$$= -e^{-\delta(r-x)}\, {}^{T}P(t+r-x)\Big|_a^r + \delta \int_a^r {}^{T}P(t+r-x) e^{-\delta(r-x)}\,dx =$$

$$= -{}^{T}P(t) + e^{-\delta(r-a)}\, {}^{T}P(t+r-a) + \delta (aA)(t)$$

<u>Уровень нормальных удержаний</u> $P(t)$

$$P(t) = \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\, {}^{T}P(t+r-x)\, m(x)\,dx$$

<u>в эксп. сл.</u>

$$P(t) = e^{-\delta[r-X(\theta)]}\, {}^{T}P(t+r-X(\theta))$$

$$\theta = \delta - \rho = \delta - \varepsilon - R$$

$$e^{\theta X(\theta)} = \int_a^r m(x) e^{\theta x}\,dx$$

$$P(t) = \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\, {}^{T}P(t+r-x)\, m(x)\,dx =$$

$$= \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\, {}^{T}P(t+r+[X(\theta)-x]-X(\theta))\, m(x)\,dx =$$

$$= \int_a^{\tau} e^{-\delta(\tau - x)} e^{\rho(X(\theta) - x)}\, {}^{T}P(t+\tau - X(\theta))\, m(x)\,dx =$$

$$= e^{(-\delta\tau + \rho X(\theta))}\, {}^{T}P(t+\tau - X(\theta)) \int_a^{\tau} e^{(\delta - \rho)x}\, m(x)\,dx$$

$$\theta = \delta - \rho$$

$(aV)(t)$ – актуарные накопленные обязательства

$M(x)$

$$(aV)(t) = \int_a^{\tau} e^{-\delta(\tau - x)}\, {}^{T}P(t+\tau - x)\, M(x)\,dx$$

$$\underline{P(t)} = \int_a^{\tau} e^{-\delta(\tau - x)}\, {}^{T}P(t+\tau - x)\, dM(x) =$$

$$= e^{-\delta(\tau - x)}\, {}^{T}P(t+\tau - x)\, M(x) \Big|_a^{\tau} - \delta \int_a^{\tau} M(x)\, e^{-\delta(\tau - x)} \cdot$$

$$\cdot\, {}^{T}P(t+\tau - x)\,dx + \int_a^{\tau} M(x)\, e^{-\delta(\tau - x)} \frac{\partial}{\partial t}\, {}^{T}P(t+\tau - x)\,dx =$$

$$= {}^{T}P(t) - \delta (aV)(t) + \frac{d}{dt}(aV)(t)$$

$$P(t) + \delta (aV)(t) = {}^{T}P(t) + \frac{d}{dt}(aV)(t)$$

1) $P(t+u) = \dfrac{\text{в exp}}{e^{\rho u}\, P(t)}$, $\rho = \tau + R$

2) $(aV)(t+u) = e^{\rho u}\,(aV)(t)$

$$\frac{(aV)(t+u)-(aV)(t)}{m} = \frac{(e^{\rho u}-1)(aV)(t)}{u} \xrightarrow{u\to 0} \rho(aV)(t)$$

3) $P(t)+\theta(aV)(t) = {}^{T}P(t)$, $\theta=\delta-\rho$

23.04

$(Pa)(t)$ – актуарная наст. величина будущих норм. удержаний.

$$(Pa)(t) = \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\, {}^{T}P(t+r-x)\int_x^r m(y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\, {}^{T}P(t+r-x)\left[1-M(x)\right]dx$$

$$(aA)(t) = \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\, {}^{T}P(t+r-x)\,dx$$

$$(aV)(t) = \int_a^r e^{-\delta(r-x)}\, {}^{T}P(t+r-x)M(x)\,dx$$

$$\Rightarrow (Pa)(t) = (aA)(t)-(aV)(t)$$

$$(aA)(t) = \underbrace{(Pa)(t)}_{1-M(x)} + \underbrace{(aV)(t)}_{M(x)}$$

$\mathcal{M}_I(x) = \bar{a}_{a:\overline{x-a}}$ $\quad (aV)_I$

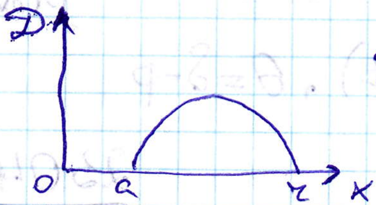
$\mathcal{M}_{II}(x) = \frac{x-a}{r-a}$ $\quad (aV)_{II}$

$D(x) = \mathcal{M}_I(x) - \mathcal{M}_{II}(x)$:

$\mathcal{D}'(a)>0$ и $\exists!\ \mathcal{D}'(x)=0$, $x\in(a,r)$

$\Rightarrow (aV)_I - (aV)_{II} > 0$

$\mathcal{D}(r) = 0$



$\mathcal{D}(a) = 0$

$\Rightarrow \mathcal{D}(x) > 0 \Rightarrow \mathcal{M}_I > \mathcal{M}_{II} \Rightarrow (aV)_I > (aV)_{II}$

$$\mathcal{D}'(x) = \frac{e^{-\delta(x-a)} s(x)}{\int_a^r e^{-\delta(y-a)} s(y)\,dy} - \frac{1}{r-a}$$

$$\frac{s(a)}{\int_a^r e^{-\delta(y-a)} s(y)\,dy} > \frac{1}{r-a}$$

$$s(a)(r-a) > \Big(\int_a^r \underbrace{e^{-\delta(y-a)}}_{\le 1} \underbrace{s(y)}_{\le s(a)}\,dy\Big)^{=I} < s(a)(r-a)$$

$\Rightarrow \mathcal{D}'(a) > 0$

$$\mathcal{D}'(r) = \frac{e^{-\delta(r-a)} s(r)}{I} - \frac{1}{r-a} < \frac{1}{r-a} - \frac{1}{r-a} = 0$$

$$\mathcal{D}''(x) = \frac{\left(e^{-\delta(x-a)}(\delta s(x) - s'(x))\right)}{\int \cdots}$$

$e^{-\delta(x-a)} s(x)$

$e^{-\delta(x-a)} \searrow, > 0$

$s(x) \searrow, > 0$ $\Rightarrow$ произв $\searrow, > 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \mathcal{D}''(x) < 0 & \forall x \in (a, r) \\ \mathcal{D}'(a) > 0 \\ \mathcal{D}'(r) < 0 \end{cases} \Rightarrow \exists!\ \tilde{x} \in (a, r) : \mathcal{D}'(\tilde{x}) =$$

$$(Pa)_{II} > (Pa)_{I}$$

Методы индивидуальных удержаний

акт. наст. величина будущих пенс. выплат

$$(aA)(x) = e^{-\delta(r-x)} \frac{s(r)}{s(x)} \bar{a}_r^h$$

$$\bar{a}_r^h = \int_r^\infty e^{-\delta(r-x)} h(x) \frac{s(x)}{s(r)} dx$$

Уровень норм. удержаний

$$P(x) = (aA)(x)\, m(x)$$

актуарные накопл. обяз-ва

$$(aV)(x) = (aA)(x)\, M(x)$$

$$(P\{a)(x) = (aA)(x) - (aV)(x) = (aA)(x)(1 - M(x)$$

$(aA)(x) \neq (aA)(x)$ (не завис от времени)

$$m(x) = \frac{1}{r-a}$$

$$m(x) = k\,\omega(x)\, e^{\tau x} = \frac{\omega(x) e^{\tau x}}{\int_a^r \omega(y) e^{\tau y} dy}$$

$\tau = 0:$

$$m(x) = \frac{\omega(x)}{\int_a^z \omega(y)\, dy}$$

$$P(x) = (a\mathcal{A})(x)\, m(x) = k$$

$$m(x) = \frac{k}{(a\mathcal{A})(x)} = \frac{k\, s(x)}{e^{-\delta(z-x)}\, s(z)\, \bar{a}_z^h} = k_+ e^{-\delta x} s(x)$$

$$m(x) = \frac{e^{-\delta x}\, s(x)}{\int_a^z e^{-\delta y} s(y)\, dy}$$